Περιεχόμενα

4

Η Απλοποίηση της Διαδικασίας Επιλογής Χαρτοφυλακίων

4.1 Εισαγωγή

Η ανάγκη για την εισαγωγή νέων υποδειγμάτων

Ο προσδιορισμός ενός αποτελεσματικού μετώπου προϋποθέτει τον υπολογισμό ενός συνόλου χαρτοφυλακίων μέσω των οποίων αυτό θα αναπαρίσταται. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι ιδιαίτερα δυσχερής, καθώς για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου χρεογράφων απαιτείται ένας αρκετά μεγάλος όγκος δεδομένων.

Από την παράγραφο 3.2, για την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου ισχύει:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i$$

$$\sigma_P = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)^{1/2}$$

Όπως φαίνεται από τις εκφράσεις αυτές, τα απαιτούμενα δεδομένα για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου αφορούν στις αναμενόμενες αποδόσεις των χρεογράφων που περιλαμβάνει, στις τυπικές αποκλίσεις τους και στα στοιχεία του **μητρώου συσχετίσεων** (correlation matrix). Το πρόβλημα αποκτά διαστάσεις ειδικά στην περίπτωση του υπολογισμού του μητρώου συσχετίσεων. Πιο συγκεκριμένα, για ένα σύνολο N χρεογράφων θα πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης ρ_{ij} για όλα τα δυνατά ζεύγη χρεογράφων i και j. Καθώς ο πρώτος δείκτης μπορεί να λάβει N τιμές και ο δεύτερος $N-1$ τιμές (διότι $i \neq j$), προκύπτει ότι το σύνολο των συντελεστών συσχέτισης που απαιτείται να υπολογιστούν ανέρχεται σε $N(N-1)/2$ (διότι $\rho_{ij} = \rho_{ji}$).

Με βάση τα παραπάνω και με δεδομένο ότι σε επίπεδο πρακτικής η πλειονότητα των εταιρειών διαχείρισης χαρτοφυλακίου στρατηγικά ακολουθεί ένα πλήθος 150 έως 250 μετοχικών χρεογράφων (Elton et al., 2007), αποδεικνύεται ότι θα πρέπει σε σταθερή βάση να υπολογίζεται ένα σύνολο 11.175 έως 31.125 συντελεστών συσχέτισης. Ο υπολογισμός αυτού του όγκου και τύπου των δεδομένων σε σταθερή βάση αποτελεί μια διαδικασία με πολύ μεγάλες δυσκολίες. Για τον λόγο αυτό, σημαντικό πλήθος ερευνών εστιάζει στην ανάπτυξη υποδειγμάτων μέσω των οποίων επιτυγχάνεται, τόσο ο περιορισμός του όγκου, όσο και η απλοποίηση του τύπου των δεδομένων που απαιτούνται ως είσοδοι για τη διαδικασία της ανάλυσης χαρτοφυλακίου.

4.2 Το Υπόδειγμα Ενός Δείκτη

Ανάπτυξη του υποδείγματος ενός δείκτη

Το πλέον διαδεδομένο από τα υποδείγματα αυτά, είναι το **υπόδειγμα του ενός δείκτη** (single-index model). Το συγκεκριμένο υπόδειγμα βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις ενός συνόλου χρεογράφων μπορεί να είναι μεταξύ τους συσχετισμένες, εξαιτίας του ότι η συμπεριφορά των χρεογράφων αυτών επηρεάζεται με τον ίδιο τρόπο από τις αλλαγές που συμβαίνουν στην αγορά. Πράγματι, όταν η τάση της αγοράς, όπως αυτή μετράται π.χ. από τον γενικό δείκτη του χρηματιστηρίου, είναι ανοδική, τότε οι τιμές της πλειοψηφίας των χρεογράφων είναι επίσης ανοδικές. Στην αντίθετη περίπτωση, μια πτωτική τάση του γενικού δείκτη συνδυάζεται με πτώση στις τιμές των περισσότερων χρεογράφων.

Με βάση τα παραπάνω, η απόδοση R_i ενός χρεογράφου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m$$

όπου a_i η συνιστώσα της απόδοσης του χρεογράφου i που είναι ανεξάρτητη της απόδοσης της αγοράς (τυχαία μεταβλητή), R_m η απόδοση του γενικού δείκτη της αγοράς (τυχαία μεταβλητή) και β_i μια σταθερά η οποία μετρά τη μεταβολή που αναμένεται να έχει η απόδοση R_i του χρεογράφου για δεδομένη μεταβολή της απόδοσης R_m του γενικού δείκτη της αγοράς.

Η συνιστώσα της απόδοσης του χρεογράφου που είναι ανεξάρτητη της απόδοσης της αγοράς είναι δυνατόν να γραφεί ως εξής:

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

όπου οι όροι α_i και e_i εκφράζουν την αναμενόμενη τιμή και το τυχαίο μέρος (με αναμενόμενη τιμή ίση με το μηδέν) της συνιστώσας a_i. Με βάση τα παραπάνω, η απόδοση R_i ενός χρεογράφου μπορεί να γραφεί τώρα ως εξής:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

όπου οι όροι R_m και e_i είναι τυχαίες μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές θα πρέπει να είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\operatorname{cov}(e_i, R_m) = E\left[(e_i - 0)\left(R_m - \bar{R}_m\right)\right] = 0$$

Πράγματι, εάν οι μεταβλητές R_m και e_i είναι ασυσχέτιστες η ακρίβεια με την οποία το υπόδειγμα του ενός δείκτη περιγράφει την απόδοση ενός χρεογράφου θα είναι ανεξάρτητη της απόδοσης που μπορεί να έχει η αγορά.

Η βασική υπόθεση του υποδείγματος ενός δείκτη έχει να κάνει με το ότι το τυχαίο μέρος e_i είναι ανεξάρτητο του e_j για όλες τις τιμές των i και j:

$$E(e_i, e_j) = 0$$

Η παραπάνω υπόθεση εκφράζει την κύρια ιδιότητα του υποδείγματος ενός δείκτη, με βάση την οποία η ομοιότητα αναφορικά στη μεταβολή των τιμών ενός συνόλου χρεογράφων οφείλεται στην επίδραση του γενικού δείκτη της αγοράς και μόνο (π.χ. αποκλείονται επιδράσεις από συγκεκριμένους βιομηχανικούς κλάδους κλπ.).

Με βάση τα παραπάνω, το υπόδειγμα ενός δείκτη διατυπώνεται ως εξής:

Βασική εξίσωση

$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

Από κατασκευή

Αναμενόμενη τιμή του e_i = $E(e_i) = 0$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

Από υπόθεση

i. $E\left[e_i\left(R_m - \bar{R}_m\right)\right] = 0$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

ii. $E(e_i, e_j) = 0$ για όλα τα ζεύγη χρεογράφων $i = 1, 2, ..., N$ και $j = 1, 2, ..., N$ με $i \neq j$

Εξ' ορισμού

i. Διακύμανση του e_i = $E(e_i)^2 = \sigma_{e_i}^2$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

ii. Διακύμανση του R_m = $E(R_m - \overline{R}_m)^2 = \sigma_m^2$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

Στη συνέχεια εξάγονται αναλυτικά οι εκφράσεις για την αναμενόμενη τιμή $\overline{R}_i$, τη διακύμανση σ_i^2 και τη συνδιακύμανση σ_{ij}.

Για την αναμενόμενη απόδοση $\overline{R}_i$ ενός χρεογράφου:

$$E\left(R_i\right) = E\left(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i\right) \Rightarrow$$
$$E\left(R_i\right) = E\left(\alpha_i\right) + E\left(\beta_i R_m\right) + E\left(e_i\right) \Rightarrow$$
$$E\left(R_i\right) = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m$$

Για τη διακύμανση σ_i^2 ενός χρεογράφου:

$$\sigma_i^2 = E\left(R_i - \overline{R}_i\right)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = E\left[\left(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i\right) - \left(\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m\right)\right]^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = E\left[\beta_i\left(R_m - \overline{R}_m\right) + e_i\right]^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E\left(R_m - \overline{R}_m\right) + 2\beta_i E\left[e_i\left(R_m - \overline{R}_m\right)\right] + E\left(e_i\right)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E\left(R_m - \overline{R}_m\right) + E\left(e_i\right)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2$$

Για τη συνδιακύμανση σ_{ij} μεταξύ δυο χρεογράφων:

$$\sigma_{ij} = E\left[\left(R_i - \overline{R}_i\right)\left(R_j - \overline{R}_j\right)\right] \Rightarrow$$
$$\sigma_{ij} = E\left\{\left[\left(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i\right) - \left(\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m\right)\right]\left[\left(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j\right) - \left(\alpha_j + \beta_j \overline{R}_m\right)\right]\right\} \Rightarrow$$
$$\sigma_{ij} = E\left\{\left[\beta_i\left(R_m - \overline{R}_m\right) + e_i\right]\left[\beta_j\left(R_m - \overline{R}_m\right) + e_j\right]\right\} \Rightarrow$$
$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j E\left(R_m - \overline{R}_m\right)^2 + \beta_j E\left[e_i\left(R_m - \overline{R}_m\right)\right] + \beta_i E\left[e_j\left(R_m - \overline{R}_m\right)\right] + E\left(e_i, e_j\right) \Rightarrow$$
$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

Έχοντας υπολογίσει τις παραπάνω εκφράσεις για κάθε χρεόγραφο, είναι δυνατόν τώρα να καθοριστεί η αναμενόμενη απόδοση και η διακύμανση για κάθε χαρτοφυλάκιο.

Για την αναμενόμενη απόδοση $\overline{R}_P$ ενός χαρτοφυλακίου:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i \Rightarrow$$

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \overline{R}_m$$

Για τη διακύμανση σ_P^2 ενός χαρτοφυλακίου:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \Rightarrow$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις, για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης ενός χαρτοφυλακίου απαιτείται να εκτιμηθούν οι N τιμές των όρων α_i, οι N τιμές των όρων β_i, οι N τιμές των διακυμάνσεων $\sigma_{e_i}^2$, καθώς και οι τιμές $\overline{R}_m$ και σ_m^2 για την αναμενόμενη απόδοση και τη διακύμανση της απόδοσης του γενικού δείκτη της αγοράς. Έτσι το σύνολο των απαιτούμενων παραμέτρων με βάση το υπόδειγμα του ενός δείκτη ανέρχεται σε $3N + 2$, αριθμός σημαντικά μικρότερος σε σχέση με το σύνολο των $N(N-1)/2$ παραμέτρων (συντελεστών συσχέτισης) που απαιτούνται με βάση τους συμβατικούς ορισμούς της αναμενόμενης απόδοσης και της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου.

Για ένα πλήθος 150 έως 250 μετοχικών χρεογράφων, αποδεικνύεται ότι με βάση το υπόδειγμα του ενός δείκτη θα πρέπει να εκτιμηθεί ένα σύνολο 452 έως 752 παραμέτρων, αριθμός πολύ μικρός σε σχέση με τον όγκο των δεδομένων που απαιτούνται με βάση τους συμβατικούς ορισμούς (11.175 έως 31.125 παράμετροι).

Υπολογισμός των παραμέτρων του υποδείγματος ενός δείκτη

Με βάση το υπόδειγμα ενός δείκτη, η απόδοση R_i ενός χρεογράφου μπορεί να γραφεί ως εξής:

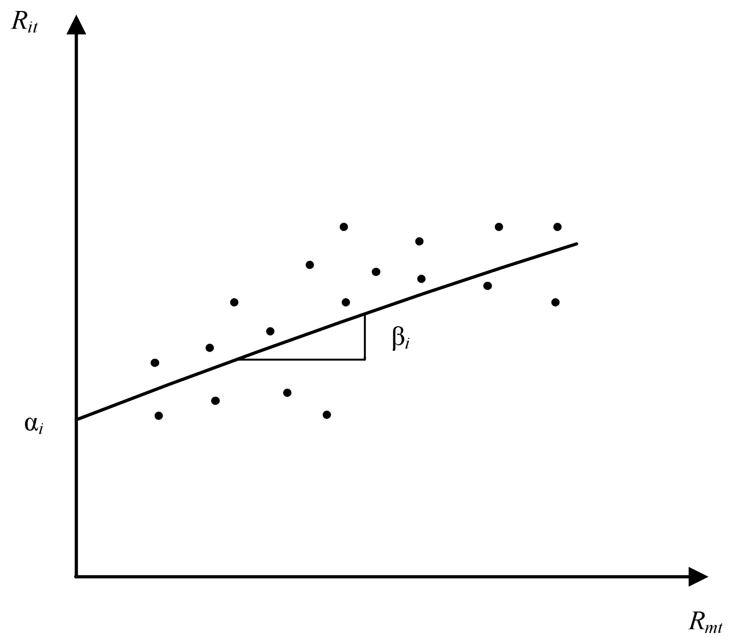
$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει μια ευθεία γραμμή η οποία είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με παλινδρόμηση των αποδόσεων κάθε χρεογράφου με τις αποδόσεις του γενικού δείκτη της αγοράς, χρησιμοποιώντας χρονοσειρές ιστορικών δεδομένων (Σχήμα 4.1). Στην εξίσωση αυτή ο όρος α_i αποτελεί τον **συντελεστή άλφα** (alpha coefficient) του χρεογράφου, ενώ αντίστοιχα ο όρος β_i αποτελεί τον **συντελεστή βήτα** (beta coefficient) αυτού.

Ο συντελεστής βήτα κάθε χρεογράφου για μια σειρά T περιόδων υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left[\left(R_{it} - \overline{R}_{it}\right)\left(R_{mt} - \overline{R}_{mt}\right)\right]}{T}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{mt} - \overline{R}_{mt}\right)^2}{T}}$$

Σχήμα 4.1: Προσδιορισμός των συντελεστών άλφα και βήτα



Αφού υπολογιστεί ο συντελεστής βήτα κάθε χρεογράφου, ο συντελεστής άλφα αυτού υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\alpha_i = \overline{R}_{it} - \beta_i \overline{R}_{mt}$$

Εξάλλου, η **υπολειμματική διακύμανση** (residual risk) κάθε χρεογράφου υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{e_i}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[R_{it} - \left(\alpha_i + \beta_i \overline{R}_{mt}\right)\right]^2$$

Συστηματικός και μη-συστηματικός κίνδυνος

Όπως αποδείχθηκε, για τον κίνδυνο ενός χρεογράφου θα ισχύει:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Δηλαδή, ο συνολικός κίνδυνος ενός χρεογράφου έχει δυο συνιστώσες:

i. Η πρώτη συνιστώσα εκφράζεται από τον όρο $\beta_i^2 \sigma_m^2$ και ονομάζεται **συστηματικός** ή **μη-διαφοροποιήσιμος κίνδυνος** (systematic or non-diversifiable risk).

ii. Η δεύτερη συνιστώσα εκφράζεται από τον όρο $\sigma_{e_i}^2$ και ονομάζεται **μη-συστηματικός** ή **διαφοροποιήσιμος κίνδυνος** (non-systematic or diversifiable risk).

Εξάλλου, εκτός από μεμονωμένα χρεόγραφα, οι συντελεστές άλφα και βήτα είναι δυνατόν να οριστούν και για χαρτοφυλάκια χρεογράφων.

Για τον συντελεστή άλφα ενός χαρτοφυλακίου θα ισχύει:

$$\alpha_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i$$

Αντίστοιχα, για τον συντελεστή βήτα ενός χαρτοφυλακίου θα ισχύει:

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$$

Η αναμενόμενη απόδοση $\overline{R}_P$ ενός χαρτοφυλακίου μπορεί τώρα να γραφεί:

$$\overline{R}_P = \alpha_P + \beta_P \overline{R}_m$$

Αν θεωρηθεί ότι το χαρτοφυλάκιο P είναι το **χαρτοφυλάκιο της αγοράς** (market portfolio), τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\overline{R}_P = \overline{R}_m$$

Η παραπάνω σχέση θα επαληθεύεται για $\alpha_P = 0$ και $\beta_P = 1$, δηλαδή οι συντελεστές άλφα και βήτα της αγοράς είναι 0 και 1 αντίστοιχα.

Για τη διακύμανση σ_P^2 ενός χαρτοφυλακίου θα ισχύει:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{e_i}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{e_i}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_P^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \beta_j \right) \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{e_i}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

Αν υποτεθεί ότι το διαθέσιμο κεφάλαιο ισοκατανέμεται μεταξύ των χρεογράφων του χαρτοφυλακίου, προκύπτει:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2 \right)$$

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίων τα οποία περιέχουν μεγάλο αριθμό χρεογράφων, ο όρος

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2 \quad \text{(μέση υπολειμματική διακύμανση)}$$

της παραπάνω σχέσης, πρακτικά εξουδετερώνεται. Αντίθετα, ο όρος $\beta_P^2 \sigma_m^2$ παραμένει ανεπηρέαστος. Με βάση τα παραπάνω, για τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου θα ισχύει:

$$\sigma_P = \left(\beta_P^2 \sigma_m^2 \right)^{1/2} = \beta_P \sigma_m = \sigma_m \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right)$$

Από την παραπάνω έκφραση αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση καλά διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων ο συντελεστής βήτα κάθε χρεογράφου αποτελεί μέτρο της συνεισφοράς του χρεογράφου αυτού στον συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Συμπερασματικά, όπως και στην περίπτωση μεμονωμένων χρεογράφων, ο συνολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου έχει δυο συνιστώσες (Σχήμα 4.2):

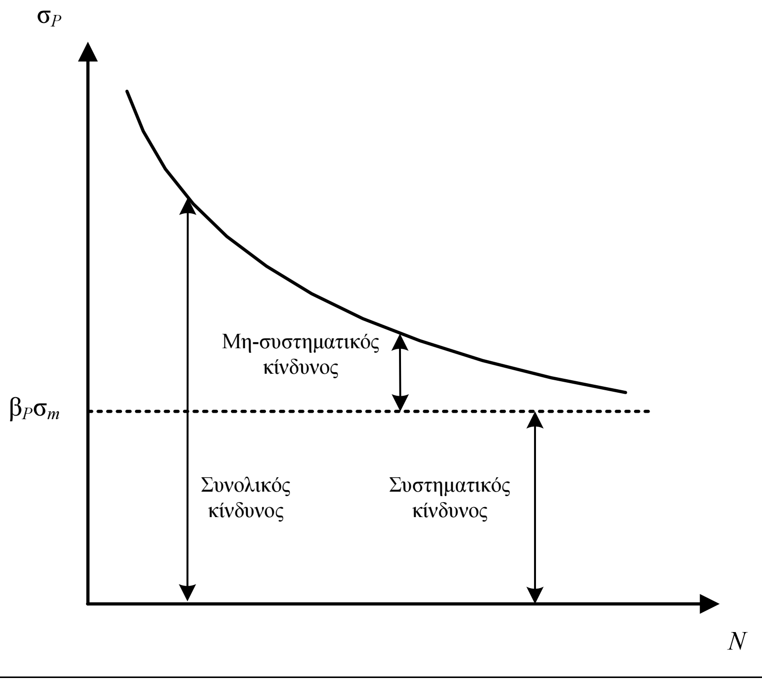
i. Η πρώτη συνιστώσα, δηλαδή ο συστηματικός ή μη-διαφοροποιήσιμος κίνδυνος του χαρτοφυλακίου, εκφράζεται από τον όρο $\beta_P^2\sigma_m^2$ και αποτελεί εκείνο το μέρος του κινδύνου το οποίο δεν είναι δυνατόν να εξουδετερωθεί.

ii. Η δεύτερη συνιστώσα, δηλαδή ο μη-συστηματικός ή διαφοροποιήσιμος κίνδυνος του χαρτοφυλακίου, εκφράζεται από τον όρο

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_{e_i}^2$$

iii. και αποτελεί εκείνο το μέρος του κινδύνου το οποίο είναι δυνατόν να εξουδετερωθεί.

Σχήμα 4.2: Κίνδυνος χαρτοφυλακίου και διαφοροποίηση



Τέλος, επισημαίνεται ότι ανάλογα με την τιμή του συντελεστή βήτα, ένα χαρτοφυλάκιο ή ένα χρεόγραφο μπορεί να θεωρηθεί ως μια επικίνδυνη ή μη επένδυση. Έτσι, χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συντελεστή βήτα μεγαλύτερο της μονάδας αναμένεται να παρουσιάσουν μεγαλύτερες μεταβολές σε σχέση με την αγορά και για τον λόγο αυτό οι επενδύσεις αυτές θεωρούνται επιθετικές. Αντίθετα χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συντελεστή βήτα μικρότερο της μονάδας αναμένεται να παρουσιάσουν μικρότερες μεταβολές σε σχέση με την αγορά και για τον λόγο αυτό οι επενδύσεις αυτές θεωρούνται αμυντικές. Τέλος, χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συντελεστή βήτα ίσο με τη μονάδα ακολουθούν πλήρως την πορεία της αγοράς, ενώ χαρτοφυλάκια ή χρεόγραφα με συντελεστή βήτα ίσο με το μηδέν δεν επηρεάζονται από την πορεία της αγοράς.

Το υπόδειγμα της αγοράς

Μια διαφοροποιημένη και ιδιαίτερα δημοφιλής μορφή του υποδείγματος ενός δείκτη αποτελεί το **υπόδειγμα της αγοράς** (market model) (Sharpe, 1963).

Η διατύπωση του υποδείγματος της αγοράς είναι πανομοιότυπη με αυτή του υποδείγματος ενός δείκτη, με τη μόνη διαφορά ότι το υπόδειγμα της αγοράς δεν δέχεται την υπόθεση $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$, βάση της οποίας η ομοιότητα αναφορικά στη μεταβολή των τιμών ενός συνόλου χρεογράφων οφείλεται αποκλειστικά στην επίδραση του γενικού δείκτη της αγοράς.

Το υπόδειγμα της αγοράς, όπως και το υπόδειγμα ενός δείκτη, έχοντας ως αφετηρία την εξίσωση:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

με την οποία συσχετίζεται η απόδοση ενός χρεογράφου με την απόδοση του γενικού δείκτη της αγοράς, καταλήγει στη σχέση:

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m$$

μέσω της οποίας προσδιορίζονται οι αναμενόμενες αποδόσεις όλων των χρεογράφων. Καθώς όμως με βάση το υπόδειγμα της αγοράς δεν ισχύει η υπόθεση $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$, οι εκφράσεις που προκύπτουν για τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες.

4.3 Υποδείγματα Πολλαπλών Δεικτών

Ανάπτυξη του γενικού υποδείγματος πολλαπλών δεικτών

Σε αντίθεση με το υπόδειγμα του ενός δείκτη, με βάση τα **υποδείγματα πολλαπλών δεικτών** (multi-index models) οι αποδόσεις ενός συνόλου χρεογράφων μπορεί να είναι μεταξύ τους συσχετισμένες, εξαιτίας του ότι η συμπεριφορά των χρεογράφων αυτών επηρεάζεται με τον ίδιο τρόπο, όχι μόνο από τις αλλαγές που συμβαίνουν στην αγορά, αλλά και από αλλαγές που συμβαίνουν σε συγκεκριμένους βιομηχανικούς κλάδους, αλλαγές στα επίπεδα των επιτοκίων κλπ.

Αν υποθέσουμε ότι η απόδοση R_i ενός χρεογράφου i επηρεάζεται από ένα πλήθος L δεικτών, τότε με βάση το γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών θα ισχύει:

$$R_i = a_i^* + b_{i1}^* I_1^* + b_{i2}^* I_2^* + ... + b_{iL}^* I_L^* + c_i$$

όπου I_j^* η πραγματική (καταγραφείσα) τιμή του δείκτη j και b_{ij}^* το μέτρο της ευαισθησίας της απόδοσης του χρεογράφου στις αλλαγές του δείκτη j. Όπως και στην περίπτωση του υποδείγματος ενός δείκτη, η συνιστώσα της απόδοσης του χρεογράφου που δε σχετίζεται με κάποιον δείκτη, εκφράζεται από τους όρους a_i^* (αναμενόμενη τιμή) και c_i (τυχαίο μέρος με αναμενόμενη τιμή ίση με το μηδέν).

Η υπολογιστική διαδικασία θα μπορούσε να απλοποιηθεί σημαντικά αν οι δείκτες στο παραπάνω υπόδειγμα ήταν ασυσχέτιστοι (ορθογώνιοι). Το πρόβλημα αυτό είναι δυνατόν να ξεπεραστεί με χρήση της ακόλουθης μεθοδολογίας:

Έστω το υπόδειγμα δυο δεικτών:

$$R_i = a_i^* + b_{i1}^* I_1^* + b_{i2}^* I_2^* + c_i$$

Θεωρώντας $I_1^* = I_1$, με παλινδρόμηση μεταξύ των I_2^* και I_1:

$$I_2^* = \gamma_o + \gamma_1 I_1 + d_t$$

όπου γ_o και γ_1 είναι οι συντελεστές της παλινδρόμησης και d_t το τυχαίο σφάλμα. Από την παραπάνω έκφραση προκύπτει:

$$d_t = I_2^* - \left(\gamma_o + \gamma_1 I_1\right)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει την απόδοση του δείκτη I_2^*, η οποία όμως τώρα είναι απαλλαγμένη από την επίδραση του δείκτη I_1.

Θέτοντας $d_t = I_2$ προκύπτει:

$$I_2^* = I_2 + \gamma_o + \gamma_1 I_1$$

οπότε για την απόδοση του χρεογράφου θα ισχύει:

$$R_i = a_i^* + b_{i1}^* I_1^* + b_{i2}^* I_2 + b_{i2}^* \gamma_o + b_{i2}^* \gamma_1 I_1 + c_i \Rightarrow$$
$$R_i = \left(a_i^* + b_{i2}^* \gamma_o\right) + \left(b_{i1}^* + b_{i2}^* \gamma_1\right) I_1 + b_{i2}^* I_2 + c_i$$

Αν $a_i^* + b_{i2}^* \gamma_o = a_i$, $b_{i1}^* + b_{i2}^* \gamma_1 = b_{i1}$ και $b_{i2}^* = b_{i2}$, τότε η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + c_i$$

όπου πλέον οι δείκτες I_1, I_2 είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι.

Επομένως, το γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών είναι δυνατόν να γραφεί σε μορφή όπου όλοι οι δείκτες I_j είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι:

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ... + b_{iL}I_L + c_i$$

Στο γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών, συσχέτιση δε θα πρέπει να υπάρχει ούτε μεταξύ των υπολοίπων c_i και των δεικτών I_j. Θα πρέπει δηλαδή:

$$E\left[c_i\left(I_j - \overline{I}_j\right)\right] = 0 \text{ για κάθε } j$$

Η παραπάνω συνθήκη εξασφαλίζει το ότι η ακρίβεια με την οποία το γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών περιγράφει την απόδοση ενός χρεογράφου είναι ανεξάρτητη της τιμής που μπορεί να λάβει οποιοσδήποτε δείκτης.

Με βάση τα παραπάνω, το γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών διατυπώνεται ως εξής:

Βασική εξίσωση

$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ... + b_{iL}I_L + c_i$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

Εξ' ορισμού

i. Υπολειμματική διακύμανση του χρεογράφου i = $\sigma_{c_i}^2$ όπου $i = 1, 2, ..., N$

ii. Διακύμανση του δείκτη I_j = $\sigma_{I_j}^2$ όπου $j = 1, 2, ..., L$

Από κατασκευή

i. Αναμενόμενη τιμή του c_i = $E(c_i) = 0$ για όλα τα χρεόγραφα $i = 1, 2, ..., N$

ii. Συνδιακύμανση μεταξύ των δεικτών j και k = $E[(I_j - \overline{I}_j)(I_k - \overline{I}_k)] = 0$ για όλους τους δείκτες $j = 1, 2, ..., L$ και $k = 1, 2, ..., L$ $\left(j \neq k\right)$

iii. Συνδιακύμανση μεταξύ των υπολοίπων c_i και των δεικτών I_j = $E[c_i(I_j - \overline{I}_j)] = 0$ για όλα τα χρεόγραφα και όλους τους δείκτες $i = 1, 2, ..., N$ και $j = 1, 2, ..., L$

Από υπόθεση

Συνδιακύμανση μεταξύ των c_i και c_j = $E(c_i, c_j) = 0$ για όλα τα ζεύγη χρεογράφων $i = 1, 2, ..., N$ και $j = 1, 2, ..., L$ με $i \neq j$

Στη συνέχεια εξάγονται αναλυτικά οι εκφράσεις για την αναμενόμενη τιμή R_i, τη διακύμανση σ_i^2 και τη συνδιακύμανση σ_{ij}.

Για την αναμενόμενη απόδοση R_i ενός χρεογράφου:

$$E\left(R_i\right) = E\left(a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ... + b_{iL}I_L + c_i\right) \Rightarrow$$
$$E\left(R_i\right) = E\left(a_i\right) + E\left(b_{i1}I_1\right) + E\left(b_{i2}I_2\right) + ... + E\left(b_{iL}I_L\right) + E\left(c_i\right) \Rightarrow$$
$$E\left(R_i\right) = a_i + b_{i1}\overline{I}_1 + b_{i2}\overline{I}_2 + ... + b_{iL}\overline{I}_L$$

Για τη διακύμανση σ_i^2 ενός χρεογράφου:

$$\sigma_i^2 = E\left(R_i - \overline{R}_i\right)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = E\left[\left(a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ... + b_{iL}I_L + c_i\right) - \left(a_i + b_{i1}\overline{I}_1 + b_{i2}\overline{I}_2 + ... + b_{iL}\overline{I}_L\right)\right]^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = E\left[b_{i1}\left(I_1 - \overline{I}_1\right) + b_{i2}\left(I_2 - \overline{I}_2\right) + ... + b_{iL}\left(I_L - \overline{I}_L\right) + c_i\right]^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = E\Big[b_{i1}^2\left(I_1 - \overline{I}_1\right)^2 + b_{i1}b_{i2}\left(I_1 - \overline{I}_1\right)\left(I_2 - \overline{I}_2\right) + ... +$$
$$b_{i1}b_{iL}\left(I_1 - \overline{I}_1\right)\left(I_L - \overline{I}_L\right) + b_{i1}\left(I_1 - \overline{I}_1\right)c_i + ...\Big] \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2 E\left(I_1 - \overline{I}_1\right)^2 + b_{i1}b_{i2}E\left[\left(I_1 - \overline{I}_1\right)\left(I_2 - \overline{I}_2\right)\right] + ... +$$
$$b_{i1}b_{iL}E\left[\left(I_1 - \overline{I}_1\right)\left(I_L - \overline{I}_L\right)\right] + b_{i1}E\left[\left(I_1 - \overline{I}_1\right)c_i\right] + ... \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2 E\left(I_1 - \overline{I}_1\right)^2 + ... + E\left(c_i\right)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{I_2}^2 + ... + b_{iL}^2\sigma_{I_L}^2 + \sigma_{c_1}^2$$

Για τη συνδιακύμανση σ_{ij} μεταξύ δυο χρεογράφων:

$$\sigma_{ij} = E\left[\left(R_i - \overline{R}_i\right)\left(R_j - \overline{R}_j\right)\right] \Rightarrow$$
$$\sigma_{ij} = E\Big\{\left[\left(a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + ...b_{iL}I_L + c_i\right) - \left(a_i + b_{i1}\overline{I}_1 + b_{i2}\overline{I}_2 + ... + b_{iL}\overline{I}_L\right)\right]$$
$$\left[\left(a_j + b_{j1}I_1 + b_{j2}I_2 + ...b_{jL}I_L + c_i\right) - \left(a_j + b_{j1}\overline{I}_1 + b_{j2}\overline{I}_2 + ... + b_{jL}\overline{I}_L\right)\right]\Big\} \Rightarrow$$

$$\sigma_{ij} = E\Big\{\Big[b_{i1}\big(I_1 - \overline{I}_1\big) + b_{i2}\big(I_2 - \overline{I}_2\big) + \ldots + b_{iL}\big(I_L - \overline{I}_L\big) + c_i\Big]$$

$$\Big[b_{j1}\big(I_1 - \overline{I}_1\big) + b_{j2}\big(I_2 - \overline{I}_2\big) + \ldots + b_{jL}\big(I_L - \overline{I}_L\big) + c_j\Big]\Big\} \Rightarrow$$

$$\sigma_{ij} = E\Big[b_{i1}b_{j1}\big(I_1 - \overline{I}_1\big)^2 + b_{i1}b_{j2}\big(I_1 - \overline{I}_1\big)\big(I_2 - \overline{I}_2\big) + \ldots +$$

$$b_{i1}b_{jL}\big(I_1 - \overline{I}_1\big)\big(I_L - \overline{I}_L\big) + b_{j1}\big(I_1 - \overline{I}_1\big)c_j + \ldots\Big] \Rightarrow$$

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}E\big(I_1 - \overline{I}_1\big)^2 + b_{i1}b_{j2}E\Big[\big(I_1 - \overline{I}_1\big)\big(I_2 - \overline{I}_2\big)\Big] + \ldots +$$

$$b_{i1}b_{jL}E\Big[\big(I_1 - \overline{I}_1\big)\big(I_L - \overline{I}_L\big)\Big] + b_{j1}E\Big[\big(I_1 - \overline{I}_1\big)c_j\Big] + \ldots \Rightarrow$$

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}E\big(I_1 - \overline{I}_1\big)^2 + b_{i2}b_{j2}E\big(I_2 - \overline{I}_2\big)^2 + \ldots + b_{iL}b_{jL}E\big(I_L - \overline{I}_L\big)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{I_2}^2 + \ldots + b_{iL}b_{jL}\sigma_{I_L}^2$$

Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις, για τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης ενός χαρτοφυλακίου απαιτείται να εκτιμηθούν οι N τιμές των όρων α_i, οι NL τιμές των όρων b_{ik}, οι L τιμές των όρων $\overline{I}_j$, οι L τιμές των διακυμάνσεων $\sigma_{I_j}^2$ και οι N τιμές των διακυμάνσεων $\sigma_{c_i}^2$. Έτσι το σύνολο των απαιτούμενων παραμέτρων με βάση το γενικό υπόδειγμα πολλαπλών δεικτών ανέρχεται σε $2N + NL + 2L$, αριθμός σημαντικά μικρότερος, και σε αυτή την περίπτωση, από το σύνολο των $N(N-1)/2$ παραμέτρων (συντελεστών συσχέτισης) που απαιτούνται με βάση τους συμβατικούς ορισμούς της αναμενόμενης απόδοσης και της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου.

Για ένα πλήθος 150 έως 250 μετοχικών χρεογράφων, αποδεικνύεται ότι με βάση ένα υπόδειγμα π.χ. 10 δεικτών, θα πρέπει να εκτιμηθεί ένα σύνολο 1820 έως 3020 παραμέτρων. Ο αριθμός αυτός είναι μεν μεγαλύτερος από τον αριθμό των παραμέτρων που απαιτούνται με βάση το υπόδειγμα του ενός δείκτη (452 έως 752 παράμετροι), παραμένει ωστόσο και πάλι πολύ μικρός σε σχέση με τον όγκο των δεδομένων που απαιτούνται με βάση τους συμβατικούς ορισμούς (11.175 έως 31.125 παράμετροι).

Τύποι υποδειγμάτων πολλαπλών δεικτών

Η έρευνα πάνω στα υποδείγματα πολλαπλών δεικτών είναι ιδιαίτερα εκτεταμένη (Elton et al., 2007). Δυο εκ των πλέον σημαντικών τύπων υποδειγμάτων πολλαπλών δεικτών οι οποίοι έχουν προταθεί κατά καιρούς είναι τα **υποδείγματα δεικτών βιομηχανίας** (industry index models) και τα **υποδείγματα θεμελιωδών πολλαπλών δεικτών** (fundamental multi-index models).

Τα υποδείγματα δεικτών βιομηχανίας έχοντας ως αφετηρία το υπόδειγμα του ενός δείκτη, ενσωματώνουν επιπλέον δείκτες προκειμένου να συσχετίσουν τις επιδράσεις συγκεκριμένων βιομηχανικών κλάδων με τις αποδόσεις των μετοχών (King, 1966; Cohen and Pogue, 1967; Elton et al., 1999).

Εξάλλου, τα υποδείγματα θεμελιωδών πολλαπλών δεικτών συσχετίζουν τις αποδόσεις των μετοχών, είτε με διάφορα θεμελιώδη μεγέθη των επιχειρήσεων, όπως π.χ. η κεφαλαιοποίηση, η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής προς τη λογιστική τιμή της μετοχής, η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής προς τα κέρδη ανά μετοχή κλπ. (Bhandari, 1988; Fama and French, 1993), είτε με διάφορες μακροοικονομικές μεταβλητές, όπως π.χ. το επίπεδο των επιτοκίων, ο πληθωρισμός, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες κλπ. (Burmeister and Mc Elroy, 1988; Burmeister et al., 1994; Chen et al., 1986; Sorensen et al., 1989).

Ένα από τα πιο διαδεδομένα υποδείγματα πολλαπλών, αποτελεί το **υπόδειγμα τριών παραγόντων** (three-factor model) των Fama and French (1993). Σε αυτό, η απόδοση μιας μετοχής συσχετίζεται:

α) με την απόδοση της αγοράς,

β) τη διαφορά αποδόσεων μεταξύ χαρτοφυλακίων τα οποία περιέχουν μετοχές υψηλής και χαμηλής κεφαλαιοποίησης, και

γ) τη διαφορά αποδόσεων μεταξύ χαρτοφυλακίων που περιέχουν μετοχές με υψηλές και χαμηλές τιμές δείκτη BV/MV.

Το βασικό πλεονέκτημα του υποδείγματος τριών παραγόντων σε σχέση με το υπόδειγμα αποτίμησης κεφαλαιακών στοιχείων είναι ότι συνεκτιμά συγκεκριμένες ανωμαλίες της αγοράς, όπως το σύνδρομο του μεγέθους και η υπεροχή σε επίπεδο απόδοσης, των μετοχών αξίας έναντι των μετοχών ανάπτυξης.

Επιπλέον, χαρακτηριστικές είναι οι περιπτώσεις των υποδειγμάτων πολλαπλών δεικτών της εταιρείας *MSCI Barra* (www.mscibarra.com), η οποία εξειδικεύεται στην ανάπτυξη πληροφοριακών συστημάτων υποστήριξης επενδυτικών αποφάσεων. Κύριο χαρακτηριστικό των υποδειγμάτων πολλαπλών δεικτών της *Barra*, είναι ότι ενσωματώνουν ένα μεγάλο πλήθος δεικτών βιομηχανίας, θεμελιωδών και άλλων χαρακτηριστικών μεγεθών των εταιρειών, με στόχο την αποτύπωση των διαφόρων πηγών κινδύνου. Ως γνωστότερα εξ' αυτών αναφέρονται τα *Barra U.S. Equity Model E3* και *Barra Europe Equity Model EUE3*, τα οποία σε επίπεδο εμπορικής εκμετάλλευσης, υποστηρίζονται συγχρόνως από ολοκληρωμένες βάσεις δεδομένων.