Παροράματα βιβλίου
Σχεδιασμός Αλγορίθμων
των Jon Kleinberg & Éva Tardos

Οι αλλαγές επισημαίνονται με μπλε χρώμα:

σελ. 107, τελευταία παράγραφος

Δένδρα Λέμε ότι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι *δένδρο* (tree) αν είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλο. Για παράδειγμα, τα δύο γραφήματα που φαίνονται στην Εικόνα 3.1 είναι δένδρα. Κατά μια στενή έννοια, τα δένδρα είναι το απλούστερο είδος συνεκτικών γραφημάτων: η διαγραφή οποιασδήποτε ακμής από το δένδρο θα το κάνει μη συνεκτικό.

σελ. 108, πρόταση 3.2

(3.2) *Έστω G ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους. Οποιεσδήποτε δύο από τις ακόλουθες προτάσεις συνεπάγονται την τρίτη.*

(i) Το G είναι συνεκτικό.

(ii) Το G δεν περιέχει κύκλο.

(iii) Το G έχει $n - 1$ ακμές.

σελ. 111, λεζάντα Εικόνας 3.3

Εικόνα 3.3 Η κατασκευή του δένδρου αναζήτησης πρώτα κατά πλάτος T για το γράφημα της Εικόνας 3.2, όπου τα σχέδια (α), (β), και (γ) απεικονίζουν τα διαδοχικά επίπεδα που προστίθενται. Οι συμπαγείς γραμμές είναι οι ακμές του T· οι διακεκομμένες ακμές ανήκουν στη συνεκτική συνιστώσα του G που περιλαμβάνει τον κόμβο 1, αλλά δεν ανήκουν στο δένδρο T.

σελ. 118, οι δύο τελευταίες παράγραφοι

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει δύο φυσικές παραμέτρους εισόδου, τον αριθμό των κόμβων $|V|$ και τον αριθμό των ακμών $|E|$. Για να τις συμβολίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχα τα $n = |V|$ και $m = |E|$. Οι χρόνοι εκτέλεσης θα δίνονται με βάση και τις δύο αυτές παραμέτρους. Ως συνήθως, στόχος μας είναι οι πολυωνυμικοί χρόνοι εκτέλεσης, και τα πολυώνυμα μικρότερου βαθμού είναι καλύτερα. Ωστόσο, με δύο παραμέτρους για το χρόνο εκτέλεσης η σύγκριση δεν είναι πάντοτε τόσο σαφής. Ποιος είναι καλύτερος χρόνος εκτέλεσης — ο χρόνος $O(m^2)$ ή ο χρόνος $O(n^3)$; Αυτό εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των n και m. Όταν υπάρχει το πολύ μία ακμή ανάμεσα σε ένα ζευγάρι κόμβων, ο αριθμός των ακμών m μπορεί να είναι το πολύ $\binom{n}{2} \le n^2$. Από την άλλη πλευρά, σε πολλές εφαρμογές, τα γραφήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι συνεκτικά, και λόγω της (3.1) τα συνεκτικά γραφήματα πρέπει να έχουν τουλάχιστον $m \ge n - 1$ ακμές. Όμως αυτές οι συγκρίσεις δεν μας λένε πάντοτε ποιος από τους δύο χρόνους εκτέλεσης (όπως m^2 και n^3) είναι καλύτερος, οπότε θα προσπαθούμε να εκφράζουμε τους χρόνους εκτέλεσης με βάση και τις δύο αυτές παραμέτρους. Σε αυτή την ενότητα σκοπεύουμε να υλοποιήσουμε τους βασικούς αλγορίθμους αναζήτησης γραφημάτων σε χρόνο $O(m + n)$. Αυτό το χρόνο θα τον αναφέρουμε ως *γραμμικό χρόνο* (linear time), αφού απαιτείται χρόνος $O(m + n)$ για να διαβαστεί απλώς η είσοδος. Σημειώστε ότι, όταν εργαζόμαστε με συνεκτικά γραφήματα, ο χρόνος εκτέλεσης $O(m + n)$ είναι ίδιος με το χρόνο $O(m)$, αφού $m \geq n - 1$.

Θεωρήστε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους, και υποθέστε ότι το σύνολο των κόμβων είναι το $V = \{1, ..., n\}$. Ο απλούστερος τρόπος αναπαράστασης ενός γραφήματος είναι με μια *μήτρα γειτνίασης* (adjacency matrix), που είναι μια μήτρα A, διαστάσεων $n \times n$, όπου το $A[u, v]$ έχει τιμή 1 αν το γράφημα περιέχει την ακμή (u, v)...

<u>σελ. 119, προτελευταία παράγραφος</u>

Ας συγκρίνουμε τις αναπαραστάσεις με μήτρα γειτνίασης και λίστα γειτνίασης. Θα εξετάσουμε πρώτα το χώρο που απαιτείται από την αναπαράσταση. Μια μήτρα γειτνίασης απαιτεί χώρο $O(n^2)$, αφού χρησιμοποιεί μήτρα $n \times n$. Αντίθετα, ισχυριζόμαστε ότι η λίστα γειτνίασης απαιτεί μόνο χώρο $O(m + n)$. Να το γιατί. Καταρχήν, χρειαζόμαστε έναν πίνακα δεικτών, μήκους n, για να διευθετήσουμε τις λίστες στον πίνακα `Adj`, και μετά χρειαζόμαστε χώρο για όλες τις λίστες. Τώρα, τα μήκη αυτών των λιστών μπορεί να διαφέρουν από κόμβο σε κόμβο, αλλά είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι συνολικά κάθε ακμή $e = (v, w)$ εμφανίζεται μόνο σε δύο από τις λίστες: στη λίστα του κόμβου v και στη λίστα του κόμβου w. Έτσι το συνολικό μήκος για όλες τις λίστες είναι $2m = O(m)$.

<u>σελ. 126, τελευταία παράγραφος</u>

Στην πραγματικότητα, υπάρχει μια πολύ απλή διαδικασία για τον έλεγχο της διμερότητας, και η ανάλυσή της μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι οι περιττοί κύκλοι είναι το *μόνο* εμπόδιο. Υποθέτουμε καταρχήν ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό, αφού αλλιώς μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε τις συνεκτικές του συνιστώσες και να αναλύσουμε ξεχωριστά καθεμία από αυτές. Μετά επιλέγουμε έναν τυχαίο κόμβο $s \in V$ και τον χρωματίζουμε κόκκινο· δεν υπάρχει κάποια απώλεια γενικότητας με αυτό, αφού ο κόμβος s πρέπει να πάρει κάποιο χρώμα. Έπεται ότι όλοι οι γείτονες του s πρέπει...

<u>σελ. 127, πρόταση 3.15</u>

> **(3.15)** *Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα, και έστω ότι L_1, L_2, ... είναι τα επίπεδα που παράγονται από τον αλγόριθμο BFS όταν ξεκινάμε από τον κόμβο s. Θα πρέπει να ισχύει ένα από τα ακόλουθα.*

<u>σελ. 130, δεύτερη παράγραφος</u>

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε τι υπολογίζει αυτή η εκδοχή του αλγορίθμου BFS. Στα κατευθυνόμενα γραφήματα μπορεί ένας κόμβος s να έχει διαδρομή προς έναν κόμβο t ακόμα και αν ο t δεν έχει διαδρομή προς τον κόμβο s· και αυτό που υπολογίζει ο κατευθυνόμενος αλγόριθμος BFS είναι το σύνολο όλων των κόμβων t που έχουν την ιδιότητα ότι ο κόμβος s έχει διαδρομή προς τον κόμβο t. Αυτοί οι κόμβοι μπορεί να έχουν, αλλά μπορεί και να μην έχουν, διαδρομή προς τον κόμβο s.

σελ. 130, έκτη παράγραφος

Θυμηθείτε ότι ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι *ισχυρά συνεκτικό* (strongly connected) αν, για κάθε ζεύγος κόμβων u και v, υπάρχει διαδρομή από το u στο v και διαδρομή από το v στο u. Αξίζει να διατυπώσουμε με τυπικό τρόπο κάποια ορολογία για την ιδιότητα που βρίσκεται στην καρδιά αυτού του ορισμού· θα πούμε ότι δύο κόμβοι u και v ενός κατευθυνόμενου γραφήματος είναι *αμοιβαία προσπελάσιμοι* (mutually reachable) αν υπάρχει διαδρομή από τον u στον v και διαδρομή από τον v στον u. (Έτσι, ένα γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν κάθε ζευγάρι κόμβων είναι αμοιβαία προσπελάσιμο.)

σελ. 131, δεύτερη παράγραφος

Υπάρχει ένας απλός αλγόριθμος γραμμικού χρόνου ο οποίος ελέγχει αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό· ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται έμμεσα στην (3.16). Επιλέγουμε έναν τυχαίο κόμβο s και εκτελούμε τον αλγόριθμο BFS στο G ξεκινώντας από τον κόμβο s. Μετά εκτελούμε τον αλγόριθμο BFS ξεκινώντας από τον κόμβο s του G^{rev}. Τώρα, αν μία από αυτές τις δύο αναζητήσεις αποτύχει να προσπελάσει όλους τους κόμβους, τότε προφανώς το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Υποθέστε όμως ότι βρίσκουμε πως ο κόμβος s έχει διαδρομή προς όλους τους κόμβους, και ότι όλοι οι κόμβοι έχουν διαδρομή προς τον κόμβο s. Τότε για κάθε v οι κόμβοι s και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμοι, έτσι κατά συνέπεια *κάθε* ζευγάρι κόμβων u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμο: οι s και u είναι αμοιβαία προσπελάσιμοι και οι s και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμοι, έτσι λόγω της (3.16) ισχύει ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμοι.

σελ. 132, τέταρτη παράγραφος

Αν ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα δεν έχει κύκλους, τότε έχει μια εξαιρετικά απλή δομή: καθεμιά από τις συνεκτικές συνιστώσες του είναι ένα δένδρο. Είναι όμως δυνατό ένα κατευθυνόμενο γράφημα να μην έχει (κατευθυνόμενους) κύκλους και παρόλα αυτά να έχει μια πολύ πλούσια δομή. Για παράδειγμα, τέτοια γραφήματα μπορούν να έχουν μεγάλο αριθμό ακμών: αν ξεκινήσουμε με το σύνολο κόμβων $\{1, 2, ..., n\}$ και συμπεριλάβουμε μια ακμή (i, j) κάθε φορά που $i < j$, τότε το κατευθυνόμενο γράφημα που θα προκύψει έχει $\binom{n}{2}$ ακμές αλλά δεν έχει κύκλους.

σελ. 141, Άσκηση 6

6. Έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και μια συγκεκριμένη κορυφή $u \in V$. Υποθέστε ότι πραγματοποιούμε αναζήτηση πρώτα κατά βάθος στο δένδρο με ρίζα το u, και παίρνουμε έτσι ένα δένδρο T που περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του G. Υποθέστε ότι μετά πραγματοποιούμε αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος στο δένδρο με ρίζα το u και παίρνουμε το ίδιο δένδρο T. Αποδείξτε ότι $G = T$. (Με άλλα λόγια, αν το T είναι και το δένδρο αναζήτησης πρώτα κατά βάθος και το δένδρο αναζήτησης πρώτα κατά πλάτος με ρίζα το u, τότε το G δεν μπορεί να περιέχει ακμές που δεν ανήκουν στο T.)

σελ. 142, Άσκηση 7

7. Κάποιοι φίλοι σας εργάζονται σε ασύρματα δίκτυα, και μελετούν τις ιδιότητες ενός δικτύου με n φορητές συσκευές. Καθώς η συσκευή μετακινείται (στην πραγματικότητα, μετακινείται ο άνθρωπος που κατέχει τη συσκευή), ορίζεται ένα γράφημα σε κάθε χρονικό σημείο με τον εξής τρόπο: υπάρχει ένας κόμβος που αντιπροσωπεύει την κάθε μία από τις n συσκευές, και υπάρχει μια ακμή μεταξύ της συσκευής i και της συσκευής j αν οι φυσικές θέσεις των i και j δεν απέχουν περισσότερο από 500 μέτρα. (Αν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι οι συσκευές i και j βρίσκονται "εντός εμβέλειας" μεταξύ τους.)

Θέλουν σε όλες τις χρονικές στιγμές το δίκτυο των συσκευών να είναι συνεκτικό, έτσι περιορίζουν την κίνηση των συσκευών προκειμένου να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: σε όλες τις χρονικές στιγμές, κάθε συσκευή i απέχει λιγότερο από 500 μέτρα από τουλάχιστον $n/2$ άλλες συσκευές. (Θα υποθέσουμε ότι το n είναι άρτιος αριθμός.) Αυτό που θέλουν να ξέρουν είναι το εξής: Εγγυάται από μόνη της αυτή η ιδιότητα ότι το δίκτυο θα παραμένει συνδεδεμένο;

Ακολουθεί ένας συμπαγής τρόπος τυπικής διατύπωσης αυτής της ερώτησης με τη μορφή ισχυρισμού σχετικά με τα γραφήματα.

Ισχυρισμός: *Έστω G ένα γράφημα με n κόμβους, όπου το n είναι άρτιος αριθμός. Αν κάθε κόμβος του G έχει βαθμό τουλάχιστον $n/2$, τότε το G είναι συνεκτικό.*

Αποφασίστε αν θεωρείτε τον ισχυρισμό αληθή ή ψευδή, και δώστε μία απόδειξη είτε του ισχυρισμού είτε της άρνησής του.

σελ. 143, Ισχυρισμός

Ισχυρισμός: *Υπάρχει ένας θετικός φυσικός αριθμός c τέτοιος ώστε, για όλα τα συνεκτικά γραφήματα G, ισχύει ότι*

σελ. 143, Άσκηση 9

9. Υπάρχει η φυσική διαισθητική αντίληψη ότι δύο κόμβοι που είναι απομακρυσμένοι σε ένα δίκτυο επικοινωνιών — δηλαδή υπάρχουν πολλοί ενδιάμεσοι κόμβοι μεταξύ τους — έχουν πιο ισχνή σύνδεση από δύο κόμβους που βρίσκονται κοντά. Υπάρχει ένας αριθμός αλγοριθμικών αποτελεσμάτων που βασίζονται σε κάποιο βαθμό σε διάφορους τρόπους συγκεκριμενοποίησης αυτής της ιδέας. Ακολουθεί ένα παράδειγμα που εμπλέκει την επιδεκτικότητα των διαδρομών στη διαγραφή κόμβων.